Programa de Curso: MA-0904
Matemática Finita
I Semestre, 2021

Datos Generales

Sigla: MA-0904

Nombre del curso: Matemática Finita

Tipo de curso: Virtual

Número de créditos: 5 créditos

Número de horas semanales presenciales: 5

Número de horas semanales de trabajo independiente del estudiante: 10

Requisitos: Principios de Estadística (MA-0372)

Correquisitos: No tiene

Ubicación en el plan de estudio: IX semestre.

Horario del curso: Lunes: 13:00 a 15:50, Jueves: 14:00 a 15:50

Horario de Consulta: Martes: 16:00 a 17:00, Jueves: 13:00 a 14:00, Viernes: 16:00 a 17:00.

Datos del Profesor:

Nombre: Bryan Andrés Gómez Vargas

Correo Electrónico: bryan.gomezvargas@ucr.ac.cr; brayangv10@gmail.com

Descripción del curso

Reciba la más cordial bienvenida al curso MA-0904. Este es un curso optativo dirigido a estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática a nivel de Licenciatura. El presente curso está orientado a proveer al estudiante de nuevos conceptos y herramientas matemáticas que le permitan ampliar su visión de la misma, así como el alcance de sus aplicaciones en los procesos de modelamiento matemático. En este curso se dará énfasis a los métodos que se emplean para obtener soluciones generalizadas de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales (EDP's) y los esquemas de elementos finitos que se derivan para aproximar dichas soluciones. Para lograr un buen desempeño a lo largo del desarrollo del presente curso, los resultados necesarios de Análisis Funcional y Ecuaciones en Derivadas Parciales serán proporcionados al estudiante de manera adecuada y oportuna durante la presentación de los contenidos que ahí lo requieran. Se debe poner especial énfasis en comprender los conceptos y en desarrollar las destrezas nece-

sarias para lograr un manejo apropiado de los procesos lógicos, así como para la solución de los ejercicios. La responsabilidad de llevar el curso con éxito es compartida. Del o la estudiante, se espera una actitud positiva que le permita llevar a cabo su tarea con el esfuerzo necesarios. De parte del docente, en calidad de facilitador del proceso de aprendizaje, pondrá a su disposición sus conocimientos, así como el mayor empeño. Desde ya, se le desea el mejor de los éxitos durante este ciclo lectivo.

Objetivo General

Dotar al estudiante de las herramientas matemáticas necesarias, para obtener aproximaciones de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP's) utilizando Métodos de Elemento Finito.

Objetivos específicos

Con este curso se contribuirá a que el estudiante:

1. Conozca y aplique teoría clásica de Análisis Funcional.
2. Se familiarice con los principales resultados teóricos que se emplean en el análisis de problemas variacionales.
3. Aprenda a derivar formulaciones variacionales para abordar problemas de contorno de EDP's.
4. Conozca el sustento abstracto de los elementos finitos básicos.
5. Aprenda a derivar esquemas de elementos finitos.
6. Reconozca la necesidad de introducir métodos de elementos finitos, como herramienta para la aproximación numérica y la simulación computacional de distintos modelos matemáticos en mecánica de los medios continuos.
7. Realice simulaciones computacionales que evidencien la eficiencia de los Métodos de Elementos Finitos empleados.

Contenidos

- A. Preámbulo. (4 semanas)

1. Algunos conceptos y resultados preliminares.
2. Nociones básicas de Espacios de Sobolev.
3. Dualidad: Teorema de Representación de Riez, Teorema de la mejor aproximación en un espacio de Hilbert, Teorema de Descomposición ortogonal.
4. Operadores lineales: Conceptos básicos, caracterización de operadores lineales, operadores adjuntos en espacios normados, operadores adjuntos en espacios de Hilbert
5. La EDP's como herramientas para la descripción de fenómenos reales: Ejemplos, Soluciones clásicas, Método de Separación de Variables, Soluciones generalizadas.

B. Problemas Variacionales. (5 semanas)

1. El Lema de Lax-Milgram.
2. El Método de Galerkin: El caso H-elíptico y el caso general.
3. Teoría de Babuška-Brezzi: la ecuación de operadores, la condición inf-sup, el resultado de existencia y unicidad de solución, el esquema de Galerkin.
4. Trazas e identidades de Green: Trazas de $H^1(\Omega)$, $H^{1/2}(\Gamma)$, Integración por partes e identidad de Green, Trazas Normales de $H(\text{div}, \Omega)$.
5. Ejemplos de aplicación: El problema de Poisson, El problema de Poisson con condiciones mixtas, El problema de elasticidad lineal, El problema de Poisson en formulación primal-mixta.

C. Operadores compactos (4 semanas)

1. Resultados preliminares
2. Operadores de Rango Finito
3. Operadores compactos en espacios normados
4. Método de Galerkin y Alternativa de Fredholm
5. Ejemplos de aplicación: Ecuación de Helmholtz en 1D, el problema de Poroelasticidad lineal.

D. Elementos Finitos. (2 semanas)

1. Elementos finitos de lagrange
2. Aplicación a Problemas Elípticos.

E. Posibles temas de exposición

1. Extensión de la teoría de Babuška-Brezzi al caso de problemas de doble punto silla

2. Problemas variacionales aumentados
3. Teoremas de Punto Fijo para la solución de problemas acoplados
4. Cálculo de errores a priori
5. Cálculo de errores a posteriori

Metodología

Este curso se realiza bajo un enfoque virtual. Se utilizará la plataforma institucional Mediación Virtual para colocar los documentos y videos del curso, además de la realización de exámenes, y tareas. Funcionará también para la recepción de los proyectos, y para la colocación de los enlaces necesarios para el desarrollo de las clases sincrónicas, y de las exposiciones por parte de los estudiantes. El curso contemplará la participación tanto del docente, como de los y las estudiantes. En particular, se realizarán exposiciones de ambas partes, habrá sesión de resolución de problemas, y apoyo individual en caso de ser necesario. Se trabajará con listas de ejercicios recomendados por el profesor, con el fin de reforzar la comprensión de los contenidos estudiados en clases.

Evaluación

Descripción	Porcentaje
Primer Parcial	20%
Segundo Parcial	20%
Proyecto	15%
Tareas	30%
Exposición	15%
Total	100%

Consideraciones sobre la evaluación:

El proyecto de investigación estará orientado al estudio teórico y computacional, de una EDP. Las tareas serán extraídas de las listas de ejercicios brindadas por el profesor. Respecto a la exposición, los estudiantes deberán desarrollar uno de los temas presentados en E. del apartado de contenidos. Tanto el proyecto, como la exposición, deberá elaborarse utilizando $\text{\LaTeX}$, o “Beamer”. Finalmente, los exámenes parciales serán teóricos, y buscan determinar el nivel de

comprensión de los temas abarcados.

La nota final (NF) es la suma correspondiente de los porcentajes obtenidos en los tres exámenes parciales y el proyecto de investigación.

1. Si $70 \leq NF$ el o la estudiante aprueba el curso.
2. Si $60 \leq NF < 70$ el o la estudiante tiene derecho a realizar examen de ampliación.
3. Si $NF < 60$ el o la estudiante pierde el curso.

Los exámenes de reposición se harán de forma oral y estarán a cargo de un tribunal formado por tres profesores, incluyendo al profesor del curso. No hay reposición de la reposición de ningún parcial.

Cronograma

Se advierte que las fechas propuestas a continuación son provisionales, su variación o ratificación quedan sujetas a criterios del docente.

Semana	Actividad	Observaciones
1	A.1, A.2	
2	A.2,	
3	A.3, A.4,	
4	A.4, A.5	
5	B.1, B.2	
6	B.3	
7	B.4	
8	B.5	
9	B.5	Hasta aquí los contenidos a evaluar en el I parcial
10	C.1, C.2	I parcial (Lunes 07 de Junio, 1:00 p.m, por medio de Mediación Virtual)
11	C.2, C.3	
12	C.3, C.4	
13	C.5	
14	D.1	
15	D.2	Hasta aquí los contenidos a evaluar en el II parcial; Exposiciones: Viernes 16 de Julio
16		Entrega de Proyecto: viernes 23 de Julio
17		II parcial (Martes 27 de julio, 8:00 a.m, por medio de Mediación Virtual) y Reposiciones (Miércoles 28 de julio, 8:00 a.m, por medio de Mediación Virtual)
18		Ampliación (Martes 03 de agosto, 8:00 a.m, por medio de Mediación Virtual)

Bibliografía

- [1] R.A. ADAMS AND J.J.F. FOURNIER, *Sobolev Spaces*. Academic Press, Elsevier Ltd, 2003.
- [2] SUSANNE C. BRENNER AND RIDGWAY SCOTT. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Texts in Applied Mathematics, Vol. 15. Springer, New York, 1994.
- [3] HAIM BREZIS. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.
- [4] PHILIPPE G. CIARLET. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Reprint of the 1978 edition [North-Holland, Amsterdam; MR0520174]. Classics in Applied Mathematics, 40. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.

- [5] ALEXANDRE ERN AND JEAN-LUC GUERMOND. *Theory and practice of finite elements*. Applied Mathematical Sciences, 159. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [6] GABRIEL N. GATICA. *A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method: Theory and Applications*. Springer Briefs in Mathematics. Springer, Cham, 2014.
- [7] GABRIEL N. GATICA. *Introducción al Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*. Editorial Reverté, 2014.
- [8] VIVETTE GIRAULT AND PIERRE-ARNAUD RAVIART. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*, Springer, Berlin, 1986.
- [9] R. OYARZÚA, AND R. RUIZ-BAIER, *Locking-Free Finite Element Methods for Poroelasticity*. SIAM J. Numer. Anal. 54 (2015) no. 5, 2951–2973. 5