



UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
APLICADA



# MA-1004: Álgebra Lineal

*Carta al Estudiante, Verano 2019*

**Descripción del curso:** El estudio de la naturaleza de los sistemas de ecuaciones lineales es desarrollado para hacer frente a los desafíos que implican disciplinas como la economía, la ingeniería y la computación. Esto se podría ver reflejado en la manipulación de bases de datos para cálculos de riesgos financieros o predicciones climáticas, cuyas dimensiones están más allá de la capacidad de cálculo humana. Tales mecanismos usan técnicas derivadas de la identificación de propiedades matemáticas de la entidad conceptual que generaliza la noción de sistemas de ecuaciones: las transformaciones lineales entre espacios vectoriales. De hecho, las soluciones de estos sistemas se pueden ver como parte de las características de funciones especiales que preservan las relaciones lineales entre los elementos del dominio y codominio. Toda esta teoría matemática se engloba dentro del campo de estudio llamado: álgebra lineal.

Este curso pretende dar al estudiante la maquinaria del álgebra lineal necesaria para poder hacer frente a cursos avanzados de su respectiva carrera, basada en los siguientes ejes teóricos: las matrices, los sistemas de ecuaciones lineales, los espacios vectoriales y las transformaciones lineales. Así, al final del curso el estudiante será capaz de identificar y entender las aplicaciones del álgebra lineal en su respectivo campo, cuando llegue el momento.

MA-1004 tiene un nivel medio de dificultad y requiere que el estudiante dedique suficiente tiempo para comprender y asimilar los diferentes conceptos y resultados teóricos estudiados en clase. Además, es necesario una importante dedicación a la resolución de ejercicios por parte del estudiante. Durante el curso de MA-1004 del verano 2019, las clases serán enfocadas como un taller, siguiendo la siguiente metodología: antes de cada semana el estudiante deberá leer las lecturas asignadas en el sitio Moodle del curso, luego, durante las clases, se hará un pequeño repaso de la materia y se dedicará el resto del tiempo de las clases a la resolución de ejercicios.

## Sigla

MA-1004

## Naturaleza

Teórico-Práctico

## Modalidad

Verano

## Créditos

3

## Requisito

Ingreso a Carrera

## Correquisito

Ninguno



## 2. Objetivos

- [1] Aplicar algoritmos convenientes para resolver y expresar, de forma adecuada, el conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales.
- [2] Conocer el álgebra de matrices y aplicarla adecuadamente a la solución y análisis de los sistemas de ecuaciones lineales.
- [3] Conocer las propiedades básicas del cálculo de determinantes y aplicarlo a la solución de sistemas de ecuaciones lineales, identificando los casos en los cuales es factible.
- [4] Conocer y aplicar la geometría vectorial a diferentes tipos de problemas.
- [5] Identificar  $\mathbb{R}^n$  como un espacio vectorial con producto interno, conocer su geometría y poder generalizar los conceptos de línea, recta y plano.
- [6] Conocer y aplicar las propiedades básicas del producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$ .
- [7] Conocer la estructura de espacio vectorial y determinar espacios vectoriales de matrices y polinomios.
- [8] Determinar si un conjunto de vectores es una base y obtener una base ortogonal a partir de una base dada.
- [9] Determinar el complemento ortogonal de un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .
- [10] Identificar los espacios vectoriales de dimensión finita de  $\mathbb{R}^n$ .
- [11] Conocer las propiedades básicas de las transformaciones lineales y su relación con el álgebra de matrices.
- [12] Determinar si una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  es una transformación lineal y representar una transformación lineal mediante una matriz.
- [13] Determinar transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita.
- [14] Determinar bases para el núcleo y la imagen de una transformación lineal.
- [15] Representar una transformación lineal mediante una matriz con respecto a bases dadas de su dominio y codominio.
- [16] Determinar matrices de cambio de bases y relacionarlas con la representación matricial de una transformación lineal.
- [17] Obtener los valores propios de una matriz y los espacios propios asociados a cada valor propio.
- [18] Determinar si una matriz o transformación lineal, es diagonalizable o no.
- [19] Aplicar los conceptos sobre ortogonalización al estudio de las ecuaciones cuadráticas en dos y tres variables con sus representaciones gráficas.

## 9. Metodología y Recursos

En las clases se utiliza la técnica expositiva con posibilidad de involucrar a los estudiantes y si es posible usar recursos tecnológicos. Las clases se deben complementar con trabajo individual por parte del estudiante para resolución de ejercicios y asimilación de la materia.

MA-1004 cuenta con una página en la plataforma **EMOODLE**<sup>†</sup>, donde se publicarán anuncios pertinentes al curso, y además se pueden encontrar encontrar prácticas, exámenes de semestres anteriores, la carta al estudiante, notas de clase, etc. Además, en el

sitio EMOODLE de MA-1004 el estudiante puede encontrar un documento digital con ejercicios resueltos y resúmenes de la materia organizados por temas. En el mismo sitio EMOODLE, algunos profesores tienen su propia página por grupo. También algunos profesores utilizan la plataforma institucional **Mediación Virtual** en modalidad virtual baja<sup>§</sup>.

Se recomiendan como libros guía de MA-1004, el libro de la editorial UCR: **Álgebra Lineal** (ver [?]) y el libro **Álgebra Lineal** de S. Grossman (ver [?]).

---

<sup>†</sup><http://emoodle.emate.ucr.ac.cr/course/view.php?id=191>

<sup>§</sup><https://mediacionvirtual.ucr.ac.cr/login/index.php>

## 4. Programa

El curso MA-1004 consta de 10 temas principales.

### [Tema 1] **Matrices**

Concepto general de una matriz. Tipos de matrices: cuadrada, diagonal, identidad, triangular, simétrica, antisimétrica, vector columna y vector fila. Álgebra elemental de matrices: suma, productor escalar y multiplicación. Propiedades básicas del álgebra de matrices.

### [Tema 2] **Sistemas de ecuaciones lineales**

Sistemas de  $n$  ecuaciones lineales en  $m$  variables homogéneos y no homogéneos. Solución y conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Matriz de coeficientes y matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales. Operaciones elementales sobre las filas de una matriz. Matrices equivalentes por filas. Sistemas equivalentes y su relación con las operaciones elementales sobre las filas de una matriz. Forma escalonada y forma escalonada reducida. Rango de una matriz. Método de reducción de Gauss-Jordan. Solución de un sistema de ecuaciones lineales que depende de uno o más parámetros. Sistemas consistentes, inconsistentes, con solución única y con infinitas soluciones.

### [Tema 3] **Matrices invertibles**

Inversa de una matriz y matrices invertibles. Método de Gauss-Jordan para hallar la inversa de una matriz. Matrices invertibles y sistemas lineales. Matrices elementales y matrices inversas. Matrices idempotentes y nilpotentes. Matriz transpuesta y sus propiedades.

### [Tema 4] **Determinantes**

Definición de determinante de una matriz  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  y sus propiedades elementales. Menores y cofactores de una matriz  $n \times n$ . Cálculo del determinante de una matriz triangular. Determinante de una matriz invertible. Determinante de la transpuesta de una matriz. Cálculo de determinantes aplicando operaciones elementales sobre las filas y/o columnas de matriz. Regla de Cramer. Cálculo de la inversa de una matriz usando la matriz adjunta. Relación entre el rango de una matriz y su determinante.

### [Tema 5] **Geometría vectorial**

Representación geométrica de un vector. Suma y producto escalar de vectores. Norma de un vector. Ángulo entre dos vectores. Producto cruz en  $\mathbb{R}^3$  y cálculo de áreas y volúmenes. Proyecciones ortogonales en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ . Combinación lineal de un conjunto de vectores en  $\mathbb{R}^n$ . Descripción de una recta en  $\mathbb{R}^n$ . Ecuaciones vectorial, paramétricas y simétricas de rectas en  $\mathbb{R}^3$ .

Planos en  $\mathbb{R}^3$ . Ecuación vectorial, normal y cartesiana de planos en  $\mathbb{R}^3$ . Hiperplanos en  $\mathbb{R}^n$ .

### [Tema 6] **Espacios vectoriales**

Definición y propiedades básicas de los espacios vectoriales. Ejemplos de espacios vectoriales incluyendo espacios de matrices y polinomios. Subespacio vectorial. Combinación lineal de un conjunto de vectores de un espacio vectorial. Dependencia e independencia lineal. Conjunto generador de un espacio vectorial. Bases y dimensión de un espacio vectorial. Coordenadas de un vector con respecto a una base ordenada. Espacio fila y espacio columna de una matriz. Intersección y suma de subespacios vectoriales.

### [Tema 7] **Transformaciones lineales**

Concepto de transformación lineal. Determinación de una transformación lineal conocida su acción sobre una base. Núcleo e imagen de una transformación lineal. Inyectividad y sobreyectividad de una transformación lineal. Relación entre las dimensiones del dominio, el núcleo y la imagen de una transformación lineal. Matriz asociada a una transformación lineal. Transformación lineal asociada a una matriz. Espacio nulo y espacio imagen de una matriz. Composición de transformaciones lineales y producto de matrices. Matriz de cambio de base. Transformaciones lineales invertibles. Rotaciones y reflexiones.

### [Tema 8] **Ortogonalidad**

Conjuntos, bases y subespacios ortogonales. Bases ortonormales. Complemento ortogonal. Proyección ortogonal sobre un subespacio. Ortonormalización de Gram-Schmidt.

### [Tema 9] **Diagonalización**

Concepto de valor y vector propio. Subespacio asociado a un valor propio. Polinomio característico de una matriz. Multiplicidad algebraica y geométrica. Matriz diagonalizable. Diagonalización de matrices. Matrices ortogonalmente diagonalizables. Valor y vector propio de un operador lineal. Diagonalización de operadores lineales. Operadores lineales ortogonalmente diagonalizables.

### [Tema 10] **Curvas y superficies cuadráticas**

Secciones cónicas: parábolas, elipses e hipérbolas. Ecuaciones canónicas de las curvas y superficies cuadráticas. Formas cuadráticas. Diagonalización de formas cuadráticas. Curvas y superficies cuadráticas. Rotación y traslación de las secciones cónicas. Ejes principales y ángulo de rotación.

## 5. Cronograma y Calendario de Exámenes

Esta es una posible distribución de temas por semanas; cada profesor puede seguir un orden distinto siempre y cuando se cubran los temas para cada examen. Las fechas de las pruebas parciales están sujetas a la disponibilidad de aulas.

- Semana 1 (del 07/01 al 11/01): Matrices y Sistemas de Ecuaciones
- Semana 2 (del 14/01 al 18/01): Inversas y Determinantes
- Semana 3 (del 21/01 al 25/01): Geometría Vectorial y Espacios Vectoriales
- Semana 4 (del 28/01 al 01/02): Espacios Vectoriales y Práctica de Examen
- PRIMER PARCIAL: Viernes 01 de Febrero
- Semana 5 (del 04/02 al 08/02): Transformaciones Lineales
- Semana 6 (del 11/02 al 15/02): Ortogonalidad y Diagonalización
- Semana 7 (del 18/02 al 22/02): Diagonalización y Curvas Cuadráticas
- Semana 8 (del 25/02 al 01/03): Curvas Cuadráticas y Práctica de Examen
- SEGUNDO PARCIAL: Jueves 28 de Febrero
- AMPLIACIÓN: 7 de Marzo

## 6. Evaluación

Se realizarán dos exámenes parciales, cada uno con el mismo valor porcentual ( $\frac{10}{2}$ ). La suma de los dos resultados da la nota de aprovechamiento **NA**. Cada examen tendrá una duración de tres horas. Si el estudiante tiene derecho a un examen de ampliación, éste evaluará los temas de los exámenes en que el estudiante no sacó nota superior o igual a 7.0. Si el estudiante debe presentar para  $n$  parciales, entonces tendrá  $n,5$  horas de tiempo para resolver el examen de ampliación (donde  $n$  puede ser 1 ó 2).

## 8. Reporte de nota final

Para efectos de promoción rigen los siguientes criterios, los cuales se refieren a la nota de aprovechamiento **NA**, expresada en una escala de 0 a 10, redondeada, en enteros y fracciones de media unidad, según la reglamentación vigente:

- Si  $\mathbf{NA} \geq 6,75$  el estudiante gana el curso.
- Si  $5,75 \leq \mathbf{NA} < 6,75$ , el estudiante tiene derecho a realizar el examen de ampliación, en el cual se debe obtener una nota superior o igual a 7,0 para aprobar el curso con nota 7,0, en caso contrario su nota sera 6,0 o 6,5, la más cercana a **NA**.
- Si  $\mathbf{NA} < 5,75$  pierde el curso.

La calificación final del curso se notifica a la **Oficina de Registro e Información**, en la escala de cero a diez, en enteros y fracciones de media unidad.

## 12. Profesores y grupos de MA-1004

Grupos	Horario	Aula	Profesor(a)
901	L 09:00-11:50, K 09:00-10:50, M 09:00-11:50, J 09:00-10:50	102 IN	Douglas Jiménez
902	L 13:00-14:50, K 13:00-15:50, M 13:00-14:50, J 13:00-15:50	102 IN	Gilberto Vargas/Miguel Alpizar
903	L 08:00-10:50, K 08:00-09:50, M 08:00-10:50, J 08:00-09:50	302 IN	María A. Lara
904	L 13:00-15:50, K 13:00-14:50, M 13:00-15:50, J 13:00-14:50	202 IN	Carlos Robles

□ **Coordinación de la Cátedra de MA-1004:** Jesús Sánchez, [jesus.sanchez\\_g@ucr.ac.cr](mailto:jesus.sanchez_g@ucr.ac.cr), oficina 411-II FM, casillero 150.

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Costa Rica  
Sede Rodrigo Facio  
Tel: (506) 2511-6555  
<http://www.emate.ucr.ac.cr>  
[aplicada.em@ucr.ac.cr](mailto:aplicada.em@ucr.ac.cr)

---

<sup>‡</sup>[http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen\\_academico\\_estudiantil.pdf](http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen_academico_estudiantil.pdf)